

Открытая физико-математическая олимпиада 2019

Математика

7 класс

1. Вдоль аллеи растут, чередуясь, берёзы и сосны. Известно, что 52 % всех деревьев – берёзы. Сколько растёт сосен? Ответ обоснуйте.
2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL . На луче AL за точкой L взята точка D так, что $LD = AB$ и $AC \parallel BD$. Найдите AC , если $AL=10$.
3. У Толи есть сто внешне одинаковых гирек с маркировками 1 г, 2 г, 3 г., ..., 100 г. Однако Толя знает, что некоторые гирьки, их не более 20, маркированы неверно: надпись не соответствует весу гирьки (гирька более лёгкая или более тяжёлая, чем указано). Как при помощи чашечных весов Толе определить, верна ли имеющаяся на гирьке 20 г маркировка?
4. Саша выписал все трехзначные числа, в записи которых нет нулей. Для каждого числа Миша записал сумму двух его цифр: наименьшей и наибольшей. Найдите сумму чисел, записанных Мишей.

Решения и критерии оценивания.

Решение каждой задачи оценивается целым числом от 0 до 7. Максимальное количество баллов равно 28.

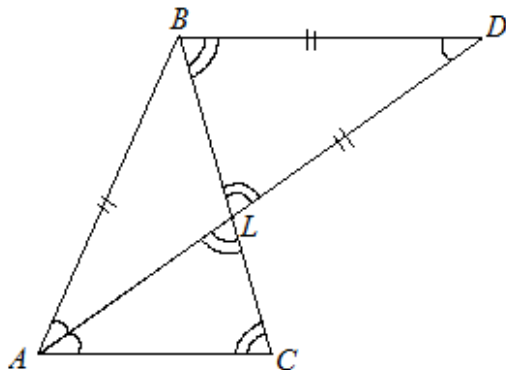
1. **Ответ:** 12.

Берёзы и сосны чередуются, но при этом берёз больше, значит, берёз на 1 больше, чем сосен, и первое и последнее деревья – берёзы. Берёзы составляют 52% от общего числа деревьев, значит сосен – 48%. Тогда 1 дерево составляет 4% от общего числа деревьев. Следовательно, сосен $48:4=12$.

Критерии. Приведено верное решение и верный ответ – 7 баллов, верный ответ – 1 балл. Если не обосновано, что берёз на 1 больше – снимается 2 балла.

2. **Ответ:** 10.

$\angle CAL = \angle BDL$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AC и BD и секущей AD . Тогда треугольник ABD равнобедренный по двум углам и $AB = BD$. Значит, треугольник BDL тоже равнобедренный. Тогда $\angle DLB = \angle DBL$ как углы при основании. Далее, $\angle DBL = \angle ACL$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AC и BD и секущей BC , $\angle BLD = \angle ALC$ как вертикальные углы. Следовательно, треугольник CAL равнобедренный, откуда находим $AC = AL=10$.



Критерии. Обоснованный ответ – 7 баллов. Доказано, что треугольник CAL равнобедренный, не найдена длина AC – 5 баллов. Доказано, что треугольник BDL равнобедренный, без дальнейших продвижений – 3 балла. Доказано, что треугольник ABD равнобедренный, без дальнейших продвижений – 1 балл.

3. Назовём гири, которые маркированы неверно, фальшивыми, остальные – настоящими.

Выполним 40 взвешиваний, проверяющих равенства

$$1+20=21, 2+20=22, \dots, 9+20=29,$$

$$10+20=30, 11+20=31, \dots, 19+20=39,$$

$$40+20=60, 41+20=61, \dots, 49+20=69,$$

$$50+20=70, 51+20=71, \dots, 59+20=79,$$

$$80+20=100.$$

Не участвуют во взвешивании девятнадцать гирек – 81 г, 82 г, ..., 99 г. Каждая из остальных гирек, кроме маркированной 20 г, участвуют в одном взвешивании. Если гирька 20 г настоящая, то взвешивания покажут, что из-за фальшивых гирек нарушилось не более 20 равенств. Если же гирька 20 г фальшивая, то заведомо нарушены будут те равенства, в которых две другие гири – настоящие. Таких равенств не менее 21. Итак, результаты взвешиваний однозначно определяют, правильно маркирована ли гирька 20 г.

Отметим, что данный набор равенств не единственный.

Критерии. Приведено верное решение, при этом имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение – 6 баллов. рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения – 1 балл.

4. **Ответ:** 7290.

Поскольку каждая цифра от 1 до 9 может стоять на любом из трех мест, то общее количество чисел, записанных Сашей, равно $9^3 = 729$.

Разобьем эти числа на пары: 111 и 999, 112 и 998 и так далее, таких пар будет $(729 - 1) : 2 = 364$ (число 555 останется без пары).

Пусть в первом числе некоторой пары наименьшая цифра равна a , тогда во втором числе наибольшая цифра равна $(10 - a)$. Аналогично, если в первом числе наибольшая цифра равна b , то наименьшая цифра во втором числе равна $(10 - b)$. Тогда в каждой паре сумма двух наименьших и двух наибольших цифр равна 20. Общая сумма таких цифр будет равна $20 \times 364 = 7280$. Добавив к этой сумме 10 (сумма наибольшей и наименьшей цифры числа 555), получим 7290.

Отметим, что подсчет искомой суммы «в лоб» связан со значительными техническими трудностями.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 1 балл. Найдено количество трехзначных чисел, в записи которых нет нулей — 1 балл.