

Открытая физико-математическая олимпиада 2019

Математика

8 класс

1. За круглым столом сидят 22 человека, каждый из них — рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, при этом внешне они никак не отличаются. Каждый из них произнес фразу: «Следующие 10 человек по часовой стрелке после меня — лжецы». Сколько среди этих 22 людей лжецов?
2. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $2\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$.
3. У Пети есть несколько гирь, веса которых в граммах — целые числа, меньшие 10. Может ли случиться, что ими можно набрать веса в 100, 102, 103 и 104 г, а веса в 101 и 105 г — нельзя?
4. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB лежит точка D , отличная от середины AB . Докажите, что среди отрезков AD , BD и CD нет равных.

Решения и критерии оценивания.

Решение каждой задачи оценивается целым числом от 0 до 7. Максимальное количество баллов равно 28.

1. **Ответ:** 20 лжецов.

Все 22 человека не могут быть лжецами, иначе все они говорят правду. Следовательно, среди них имеются рыцари. Если в кругу стоит рыцарь, то следующие 10 человек по часовой стрелке после него — лжецы. Тогда за ними, по часовой стрелке, должен стоять рыцарь, иначе первый из лжецов, стоящий за рыцарем, будет говорить правду. Поскольку за вторым рыцарем снова должны стоять 10 лжецов, их уже 22. Следовательно, среди 22 стоящих только 2 рыцаря, а остальные лжецы.

Критерии. Приведено верное решение и верный ответ – 7 баллов. Ответ без обоснований – 2 балла. Частичное обоснование – 4 балла.

2. **Ответ:** –2. Решение. $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$, $1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \Rightarrow 4,4 < 2\sqrt{5} < 4,6$, $-7,2 < -4\sqrt{3} < -6,8 \Rightarrow -3 < -2,8 < 2\sqrt{5} - 4\sqrt{3} < -2,2 < -2$.

Критерии. Приведено верное обоснованное решение – 7 баллов. Верно вычислены приближенные значения выражений $2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{3}$ с точностью до 1/10 и получен верный ответ – 4 балла. Верно вычислены приближенные значения выражений $2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{3}$, но ответ на задачу неверный – 1 балл.

3. **Ответ:** Может.

Пример (есть и другие!). 11 гирь по 9 кг и по одной гире в 1, 3 и 4 кг. Легко проверить, что все нужные веса набираются. Далее, поскольку $1+3+4+90 < 100$, чтобы набрать вес в 101 или 105 кг, надо использовать все 11 девятикилограммовых гирь. Но недостающие при этом до 101 и 105 кг веса в 2 и 6 кг соответственно гирями в 1, 3 и 4 кг набрать невозможно.

Критерии. Приведен верный и обоснованный пример – 7 баллов. За верный пример без обоснования невозможности набрать 101 и 105 кг — 4 балла. Неверный пример или неверный ответ – 0 баллов.

4. AD не равно BD по условию. Допустим, $AD = CD$. Тогда равны углы DAC и ACD . Пусть каждый из них равен x . Но тогда каждый из углов DCB и ABC равен $90^\circ - x$, откуда $AD = BD = CD$ — противоречие. Аналогично, CD не может равняться BD .

Критерии. Приведено верное обоснованное решение - 7 баллов. Если доказано хотя бы одно из неравенств: AD не равно CD или BD не равно CD - 6 баллов, если при этом доказательство недостаточно обосновано – 4 балла. Если доказательство хотя бы одно из неравенств (AD не равно CD или BD не равно CD) сведено к рассмотрению равнобедренных треугольников, но далее имеются ошибочные рассуждения - 3 балла.