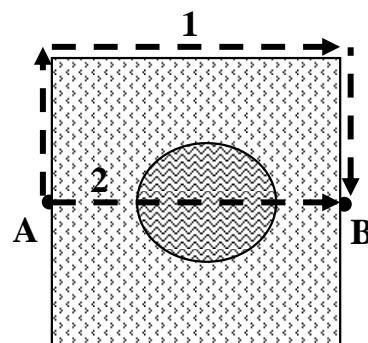


Сюрприз в роще

Двум группам туристов необходимо пройти из пункта **A**, который находится у березовой рощи, в пункт **B**, находящийся с противоположной стороны этой рощи. Группы стартовали одновременно. Одна группа пошла вокруг рощи, имеющей форму квадрата со стороной $l = 1,5 \text{ км}$, по открытой местности с постоянной скоростью $v = 1,5 \text{ м/с}$. Другая группа решила «срезать» и пошла напрямую через рощу, где их ждал неожиданный сюрприз в виде болота. В итоге обе группы в пункт **B** пришли в одно время. Найдите отношение пути, пройденного второй группой по сухой роще к пути, пройденному ими по болоту, если известно, что они все время двигались прямо, при этом скорость движения по сухому подлеску равна $2v/3$, а по болоту – $v/3$. Начало и конец маршрута лежат ровно на середине стороны квадрата.



Дано:

$$l = 1,5 \text{ км}$$

$$v = 1,5 \text{ м/с}$$

$l_1/l_2 = ?$

Решение:

Пусть l_1 – путь, пройденный второй группой по сухому подлеску, l_2 – путь, пройденный второй группой по болоту. Тогда общее время движения можно выразить следующим образом:

$$t_1 = \frac{l_1}{2v/3} + \frac{l_2}{v/3} = \frac{3l_1 + 6l_2}{2v}.$$

Учитывая, что начало и конец маршрута лежат на серединах квадрата, первая группа прошла путь равный $2l$. Выразим время движения этой группы туристов:

$$t_2 = \frac{2l}{v}.$$

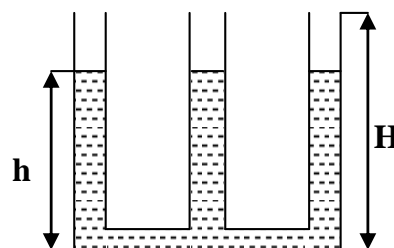
Так как обе группы начали и закончили свое движение одновременно, то они двигались одинаковое время. Приравняем выраженные выше времена с учетом того, что $l = l_1 + l_2$, и выразим искомое соотношение:

$$\frac{2l_1 + 2l_2}{v} = \frac{3l_1 + 6l_2}{2v} \Rightarrow 4l_1 + 4l_2 = 3l_1 + 6l_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = 2.$$

Ответ: $l_1/l_2 = 2$.

Три сосуда

В три сообщающихся сосуда одинакового сечения налита вода. Высота столба жидкости в каждом колене равна $h = 1 \text{ м}$. В центральный сосуд наливают масло плотности $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$. Найдите максимальную высоту столба масла, если высота каждого колена $H = 135 \text{ см}$, а плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$?



Дано:

$$h = 1 \text{ м}$$

$$\rho = 800 \text{ кг/м}^3$$

$$H = 135 \text{ см}$$

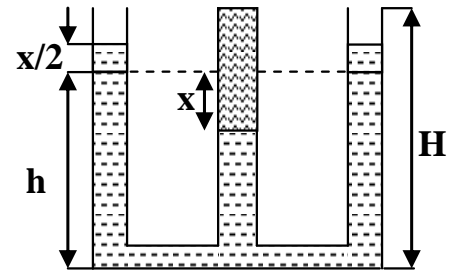
$$\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$l - ?$$

Решение:

Когда масло начнут наливать в центральный сосуд, то оно будет оставаться над водой, так как его плотность меньше. По мере наполнения центрального колена маслом, вода из него будет вытесняться в оставшиеся два колена, чтобы давление во всех коленах было одинаковым.

Максимальной высоты столб масла достигнет тогда, когда масла больше уже нельзя будет залить, по причине того, что оно будет выливаться через край.



Известно, что на дне сообщающихся сосудов давление одинаково. Учитывая, что внизу во всех коленах вода, удобно вычислять давление относительно нижнего уровня масла.

Пусть масло вытеснило столб воды высотой x из центрального колена, тогда в каждое из боковых колена пришло воды $x/2$. Запишем равенство давлений относительно нижнего уровня масла и выразим x :

$$\rho g(H - h + x) = \rho_0 g \frac{3}{2} x \Rightarrow x = \frac{\rho(H - h)}{\frac{3}{2}\rho_0 - \rho}$$

Найдем максимальную высоту столба масла:

$$l = H - h + x = H - h + \frac{\rho(H - h)}{\frac{3}{2}\rho_0 - \rho} = 0,75 \text{ м.}$$

Ответ: $l = 0,75 \text{ м.}$

Странная плотность

Вова решил измерить плотность льда. Для этого в сосуд прямоугольного сечения он налил $V_0 = 0,9 \text{ л}$ воды и поставил в морозильную камеру. Когда Вова отошёл, его одноклассник решил подшутить и опустил в воду шарик массой $m = 0,2 \text{ кг}$ и объёмом $V = 100 \text{ см}^3$. Когда вода замёрзла, Вова достал кусок льда, измерил его массу и объём. Посчитав плотность, он был крайне удивлен полученным результатом. Какой оказалась по его расчётам плотность льда? Плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$. Изменением объёма шарика с изменением температуры пренебречь.

Дано:

$$V_0 = 0,9 \text{ л}$$

$$m = 0,2 \text{ кг}$$

$$V = 100 \text{ см}^3$$

$$\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho = 900 \text{ кг/м}^3$$

Решение:

Для нахождения плотности льда Вова измерил объем куска, который он достал из морозильной камеры. Естественно, тот оказался больше, чем должен был быть на объём шарика. Вычислим объём, полученный Вовой.

Для этого найдем объём льда, из условия, что масса налитой воды и масса получившегося льда должны быть равными:

$$\rho_0 V_0 = \rho V_{\text{л}} \Rightarrow V_{\text{л}} = \frac{\rho_0 V_0}{\rho}$$

$\rho_l - ?$

Выразим измеренный Вовой объём:

$$V_1 = V_l + V = \frac{\rho_0 V_0}{\rho} + V.$$

Масса, которую измерил мальчик, равна сумме масс воды и шарика:

$$M = m + \rho_0 V_0.$$

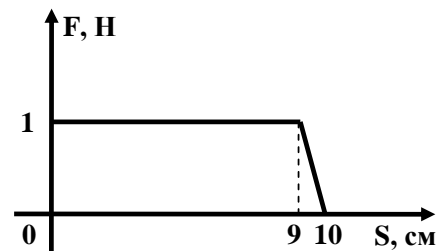
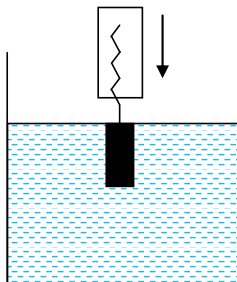
Найдем высчитанную Вовой плотность льда:

$$\rho_l = \frac{M}{V_1} = \frac{m + \rho_0 V_0}{\frac{\rho_0 V_0}{\rho} + V} = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Груз под водой

В сосуде с водой, у самой поверхности воды, находится груз массой $m = 150 \text{ г}$ и высотой $h = 6 \text{ см}$ так, как показано на рисунке. Груз прикреплен к пружине динамометра. Динамометр начинают медленно опускать вниз. График зависимости силы, которую показывает динамометр от пройденного им пути, представлен на рисунке. Найдите высоту уровня воды в сосуде, объём груза и коэффициент жесткости пружины динамометра. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.



Дано:

$$m = 150 \text{ г}$$

$$h = 6 \text{ см}$$

$$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$H, k, V - ?$

Решение:

Судя по приведенному в условии графику, вес груза не меняется, пока он не опустился на $s = 9 \text{ см}$. Следовательно, до этого момента силы, действующие на груз, не меняются, а, значит, он равномерно движется в воде.

Дальнейшее уменьшение показаний динамометра свидетельствует о том, что пружина уменьшает свою деформацию. Это значит, что груз достиг дна и пружине уже не нужно полностью компенсировать разность силы тяжести и силы Архимеда.

Найдем высоту уровня воды, которая будет складываться из пути пройденного грузом в воде и высоты самого груза:

$$H = s + h = 15 \text{ см}.$$

Далее по графику видно, что показания динамометра уменьшаются от $F_y = 1 \text{ Н}$ до нуля, пока он проходил расстояние в $l = 1 \text{ см}$. Это значит, что пружина была растянута под действием веса груза на 1 см . Найдем коэффициент

жёсткости пружины:

$$F_y = kl \Rightarrow k = F_y/l = 100 \text{ Н/м.}$$

Все время движения груза, его вес не менялся. Запишем условие равновесия груза под действием трех сил – силы тяжести, силы упругости и силы Архимеда:

$$F_y + F_A = mg.$$

Учитывая, что груз полностью погружен в воду, а $F_A = \rho g V$, где ρ - плотность окружающей среды, V - объём погруженной части тела, g - ускорение свободного падения, выразим объём тела:

$$V = \frac{mg - F_y}{\rho g} = 50 \text{ см}^3.$$

Ответ: $H = 15 \text{ см}$; $k = 100 \text{ Н/м}$; $V = 50 \text{ см}^3$.

